Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Exame Final - 19/06/2024 **Duração: 2h 30m**

1. Considere uma linguagem de primeira ordem com os símbolos de predicado E e P de um argumento, A e C de dois argumentos, sendo x e y, símbolos de variáveis, com as seguintes fórmulas:

   $\varphi_1 \equiv \forall x \Big(E(x) \to \forall y\big(P(y) \to \big(A(x,y) \vee \neg C(x,y)\big)\big)\Big)$

   $\varphi_2 \equiv \exists x\, \exists y \Big(E(x) \wedge P(y) \wedge C(x,y)\Big)$

   $\psi \equiv \exists x\, \exists y\, A(x,y)$

   Usando o método de resolução mostre que $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$.

2. Determine, justificando, o número de elementos dos seguintes conjuntos:

   (a) Conjunto de *passwords* de 6 caracteres, formadas a partir de um alfabeto de 11 letras e 4 digítos, contendo exatamente dois digítos. Note que, tanto as letras como os digítos podem repetir-se, ou seja, $xx33az$, $01xzza$ e $z00xaa$ são exemplos de possíveis *passwords*, admitindo que tanto as letras a, x, z como os digítos $0, 1, 3$ estão incluídos no alfabeto considerado.

   (b) Conjunto de sacos de 7 peças de fruta que podem ser escolhidas de uma coleção de ameixas, bananas, laranjas, maçãs e pêras, não se fazendo distinção entre frutas da mesma espécie.

3. Determine o coeficiente do termo $x^2y^2z^3$ no desenvolvimento de $\left(2x - y + \dfrac{z^3}{x}\right)^6$. Justifique.

4. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por

   $$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (-3)^n & , \ n \geq 2, \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \ . \end{cases}$$

   Resolva a equação de recorrência dada, de modo a obter uma fórmula fechada para a_n, $n \geq 0$.

5. Considere a seguinte matriz de custos W relativa a um grafo $G = (V, E, W)$ cujo conjunto de vértices é $V = \{u, v, w, x, y, z\}$:

   $$W = \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u & v & w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 6 & \infty & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 3 & \infty \\ 3 & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ 6 & 1 & 4 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & 3 & \infty & 1 & 0 & 3 \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Desenhe o grafo G e aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de menor custo entre os vértices u e y, e indique o custo desse caminho.
   Nota: Apresente todos os passos (iterações) do algoritmo através de uma tabela adequada.

   (b) Seja H o subgrafo de G induzido pelo subconjunto de vértices $\{u, v, w, x, y\} \subset V$. Verifique que H contém 8 arestas e, aplicando a fórmula recursiva $\tau(H) = \tau(H - \alpha) + \tau(H//\alpha)$, onde α é uma aresta de H que não é lacete, determine o número de árvores abrangentes de H, $\tau(H)$.

   (c) Obtenha, justificando, um subgrafo abrangente de G que seja conexo e bipartido, indicando a respetiva bipartição do conjunto dos seus vértices.

Formulário: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^n = \frac{1}{(1-\alpha x)}, \ \alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} (\alpha x)^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^k}, \ k \in \mathbb{N}.$

Cotações:

1.	2.(a)	2.(b)	3.	4.	5.(a)	5.(b)	5.(c)
3.5	2.0	2.0	2.5	3.0	3.0	2.0	2.0